

DOKL. AKAD. NAUK SSSR

Vol. 74, p. 489-92, Moscou 1950

CERN LIBRARIES, GENEVA



CM-P00100525

EXCITATION D'UNE LIGNE HELICOIDALE

par

S.Kh. Kogan

(Présenté par l'académicien M.A. Leontovich le 10.7.1950)

Traduit au CERN par A. Golovanoff

(Original : Russe)

(CERN Trans. 68-2)

Genève

Janvier 1968

On a montré dans le travail <sup>(1)</sup> que le courant dans une ligne hélicoïdale pouvait s'écrire sous la forme

$$I = \sum_{n=1}^3 I_n e^{j w_n L}, \quad (1)$$

où les constantes de propagation  $w_1, w_2, w_3$  sont définies par la solution de l'équation transcendante. Pour déterminer les coefficients d'amplitude  $I_1, I_2, I_3$ , il faut résoudre le problème de l'excitation d'une ligne hélicoïdale par une f.e.m. externe<sup>\*\*</sup>.

Supposons la f.e.m. d'excitation appliquée à un élément infiniment petit de conducteur dans la section  $L = 0$ . Alors la distribution  $E^{cm}$  de la f.e.m. appliquée le long du conducteur de l'hélice peut s'écrire sous la forme de fonction- $\delta$ <sup>\*</sup>

$$E^{cm} = g(L) = \mathcal{G}\delta(L). \quad (2)$$

Compte tenu de la conductibilité finie de l'hélice, la condition aux limites prend la forme donnée par M.A. Leontovich:

---

\* Rappelons que, comme dans le travail <sup>(1)</sup>, nous n'exigeons pas là le respect de la condition aux limites sur toute la surface du conducteur de l'hélice, mais seulement sur la génératrice, qui constitue le lieu géométrique des points de tangence de l'hélice et du cylindre de rayon  $r_0 + a_0$ .

\*\* toutes les autres notations sont les mêmes que dans le travail <sup>(1)</sup>.

$$E_L = -E^{cm} + \alpha H_u. \quad (3)$$

Ici,  $E_L$  est la composante tangentielle du champ électrique à la surface de l'hélice;  $H_u$  est la composante du champ magnétique dans la direction tangentielle au conducteur et perpendiculaire à la direction  $L$ ,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j \frac{4\pi\sigma}{\omega}}}.$$

La condition aux limites (3) se distingue de la condition analogue pour les oscillations libres de l'hélice à conductibilité idéale, considérée dans le travail <sup>(1)</sup>, par la présence d'un membre droit (différent de zéro). Dans le travail <sup>(1)</sup> (formule (5)), la condition aux limites est écrite sous la forme intégrale

$$E_L \equiv \int_{-\infty}^{\infty} J(L) f(L_1 - L) dL = 0 \quad (L = z_1/\sin \delta)^* \quad (4)$$

$$f(L_1 - L) = f(|L_1 - L|).$$

Il est évident que dans notre cas la forme intégrale de la condition aux limites s'écrit

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(L) f(L_1 - L) dL = -E^{cm} + \alpha H_u. \quad (3a)$$

---

\* Dans la référence <sup>(1)</sup>, une erreur typographique a fait écrire  $z_1 = L/\sin \delta$  dans les formules (5) et (6).

En exprimant  $H_u$  en fonction du courant total dans le conducteur et en utilisant les notations (2), nous pouvons mettre (3a) sous la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(L) f(L_1 - L) dL + g(L_1) = vJ(L_1), \quad (3b)$$

où 
$$v = \sqrt{j \frac{\mu k}{\pi a^2 \epsilon \sigma}}.$$

Cette relation peut être considérée comme une équation intégrale, qui détermine la distribution du courant total dans le conducteur de l'hélice. Sa solution est de la forme (2) :

$$J(L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwL} \frac{G(w)}{v - F_1(w)} dw, \quad (5)$$

où

$$F_1(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwL} f(L) dL,$$

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwL} g(L) dL = \mathcal{G}.$$

Ainsi,

$$J(L) = \frac{\mathcal{G}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jwL}}{v - F_1(w)} dw. \quad (5a)$$

Faisons le changement de variable  $h = w/\sin \delta$ ,  $z = L \sin \delta$ , et nous aurons :

$$J(z) = \frac{\mathcal{G} \sin \delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jhz}}{v - F(h)} dh, \quad (6)$$

où on a posé  $F(h) = F_1(w)$ .

Il est clair que l'expression pour  $F_1(w) = F(h)$  est égale au membre gauche de l'expression (4), si on pose dans ce dernier  $J(L) = e^{jwL}$  et  $L_1 = 0$ . Comme on le montre dans le travail (1) (cf. (4), (9), (10)), cette expression peut être représentée par la série :

$$F(h) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j \frac{\sin \delta}{kc} [2B_{m,0}(k^2 - h^2) + k^2 \operatorname{ctg}^2 \delta (B_{m,1} + B_{m,-1})]. \quad (7)$$

Pour  $\delta = \pi/2$ , l'hélice dégénère en un conducteur rectiligne et l'expression (6) coïncide avec l'expression intégrale du courant dans un conducteur rectiligne fin, établie par V.V. Vladimirkij.

Ainsi, le problème de la détermination du courant total (et donc des coefficients d'amplitude) se ramène au calcul de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jhz}}{v - F(h)} dh.$$

Nous avons changé le signe de l'exposant du numérateur, ce que ne modifie pas la valeur de l'intégrale, puisque  $F(h)$  est une fonction paire. La fonction sous intégrale a des pôles aux points  $h_p$  qui sont les racines de l'équation

$$v - F(h) = 0 \quad (8)$$

Comme  $\operatorname{Re} v > 0$ , il faut pour vérifier l'égalité (8) que  $\operatorname{Re} F(h) > 0$  et donc que  $\operatorname{Im} h > 0$ . Ainsi, les pôles de l'expres-

sion sous intégrale se trouvent dans le demi-plan supérieur. En posant que le milieu qui entoure l'hélice à une conductibilité très faible, nous trouvons que le demi-plan supérieur contient les points de ramification du type

$$h_{qm} = k + \frac{2\pi}{s}m.$$

Prenons l'intégrale de contour  $N = \int_{\Gamma} \frac{e^{jhz}}{v - F(h)}$ , telle que le chemin d'intégration  $\Gamma$  passe par l'axe réel du plan de  $h$  variable de  $-\infty$  à  $+\infty$ , puis par le demi-cercle infini contenu dans le demi-plan supérieur, les points de ramification étant évités (les lignes de coupe sont définies par l'équation  $\text{Re} h_{qm} = \text{const}$  (cf Fig. 1)).

Comme l'intérieur du contour d'intégration contient seulement des pôles, l'intégrale  $N$  est égale à la somme des soustractions  $P$  par rapport à ces pôles. Par ailleurs, l'intégrale  $P$  peut être représentée sous forme de somme :

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jhz}}{v - F(h)} + Q = P,$$

où  $Q$  est la somme des intégrales suivant les lignes de contournement des coupes. Comme pour le métal  $v$  est très petit, on peut le négliger au dénominateur de l'expression sous intégrale de la formule (9) sans altérer la justesse du résultat. Nous calculons  $P$  et  $Q$  à l'aide des valeurs obtenues par sommation approchée de la série (7) pour des pentes peu importantes ( $\delta < 20^\circ$ ). L'intégrale suivant les lignes de contournement des coupes donne les composantes de courant dont

l'amplitude décroît avec l'augmentation de la distance  $z$  du point d'excitation comme  $1/\ln z$ ,  $1/z$ ,  $1/z^2$ , ... etc.

En intégrant suivant les contours qui entourent les pôles, on obtient les composantes des courants, qui se propagent le long de la ligne sans atténuation. Ils sont les plus intéressants, puisque les ondes atténuées sont localisées au voisinage du point d'excitation et que dans l'analyse des lignes hélicoïdales utilisées en pratique, on peut négliger l'amplitude des ondes atténuées.

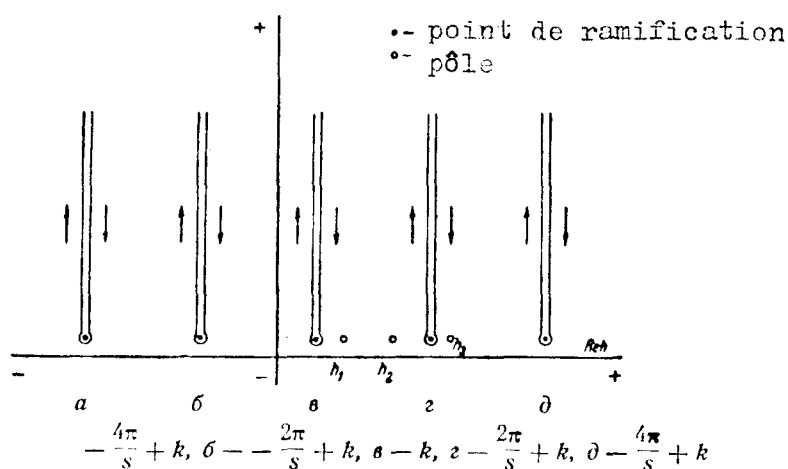


Fig. 1a

Le calcul de  $I_1, I_2, I_3$  pour différentes valeurs de  $kr_0$  donne les résultats suivants :

| $I$   | $kr_0 < 1$<br>(zone d'accélération)                | $kr_0 < \frac{\cos \delta}{1 + \sin \delta}$<br>(zone régulière) | $\frac{\cos \delta}{1 + \sin \delta} < kr_0 < \frac{\cos \delta}{-\sin \delta}$<br>(zone de ralentissement) |
|-------|--|--|---|
| $I_1$ | $\frac{8kc}{2h_1(2\ln \frac{t}{2} + 1)}$           | $\frac{8kc r_0 \cos \delta}{2}$                                  | —   |
| $I_2$ | $\frac{8c\Delta_1}{\operatorname{ctg}^2 \delta}$   |  | —   |
| $I_3$ | $\frac{8c\Delta_2}{k \operatorname{ctg}^2 \delta}$ |  | —   |

$$t = 0,577 \nu r_0 \beta e^{-\xi}; \quad v = V \sqrt{h_1^2 - k^2}; \quad \xi = -\frac{1}{\operatorname{ctg} \delta} \ln \left( 1 - e^{-\frac{2\pi}{s} a_0} \right)$$

$\Delta_2$  и  $\Delta_3$  sont définis par les relations :

$$\ln \Delta_2 r_0 \approx -2 \left\{ \left[ \frac{1}{(kr_0)^2} - 2 \operatorname{tg} \delta \right]^2 (1 + 2\xi) + \frac{1}{2} \ln kr_0 - 0,041 \right\}$$

$$\ln \Delta_3 r_0 \approx -2 \left\{ \left[ \frac{1}{(kr_0)^2} + 2 \operatorname{tg} \delta \right]^2 (1 + 2\xi) + \frac{1}{2} \ln kr_0 - 0,041 \right\}.$$

Comme  $\Delta_2 \ll k$  et  $\Delta_3 \ll k$ , on peut négliger dans les deux premières zones les amplitudes  $I_2$  et  $I_3$ , et considérer que seule une onde à constante de propagation  $w_1$  progresse le long du conducteur, ce qui est d'ailleurs observé en pratique. Dans un petit intervalle de fréquences seulement, au voisinage de la première fréquence critique, l'amplitude  $I_2$  devient comparable à l'amplitude  $I_1$ . Dans la troisième zone, comme on l'a déjà montré <sup>(1)</sup>, il n'existe qu'une seule onde de courant à constant de propagation  $w_3$ .

L'auteur exprime sa reconnaissance pour les conseils et l'intérêt témoigné à l'occasion du présent travail par les Professeurs Ya.N. Feld et L.A. Vajnsteyn.

---

#### REFERENCES

1. S.Kh. Kogan. DAN. 66, N° 5, 867 (1949)
2. V.I. Simonov, Cours de mathématiques supérieures 4, 1941.